Wintersemester 2005/06
Reimund Albers

Arithmetik als Prozess

4. Übung
Logik, Kongruenzrechnung

Präsenzübungen (für 14.11./15.11./16.11)

1. Untersuchen Sie, ob die Relation eine Äquivalenzrelation ist. Untersuchen Sie dazu <u>immer alle drei</u> Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:
    a. „ist Teiler von“
    b. „sind Aufgabengruppenpartner“
    Erläuterung: Zwei Menschen a,b sind Aufgabengruppenpartner, in Zeichen a AGP b, wenn sie in der Vorlesung „Arithmetik als Prozess“ in diesem Semester ihre 3.Übung in einer Gruppe abgegeben haben.
    c. „sind Gruppenpartner“
    Erläuterung: Zwei Menschen a,b sind Gruppenpartner, in Zeichen a GP b, wenn es (irgend) eine Arbeitsgruppe gibt, in der a und b zusammen arbeiten.

2. Berechnen Sie x
    a. $3^2 \equiv x \bmod 7$ mit $0 \leq x \leq 6$
    b. $3^4 \equiv x \bmod 7$ mit $0 \leq x \leq 6$. Verwenden Sie geschickt das Ergebnis aus a.
    c. Berechnen Sie jeweils $x_i, i \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq x_i < 11$
    $7^2 \equiv x_2 \bmod 11$ $7^3 \equiv x_3 \bmod 11$ $7^4 \equiv x_4 \bmod 11$ $7^5 \equiv x_5 \bmod 11$ u.s.w., bis Sie eine Regelmäßigkeit erkennen können.
    d. Verwenden Sie die Regelmäßigkeit aus c., um möglichst geschickt $7^{603} \equiv y \bmod 11,\ 0 \leq y < 11$ zu berechnen.

Hausübungen (Abgabe: Do, 17.11.)

3. Im Normalfall gilt:
„Wenn jemand den Masterabschluss hat, dann hat er (vorher) den Bachelor gemacht.“
    a. Was verstößt gegen diesen „Normalfall“? **Verneinen** Sie die Implikation.
    b. Bilden Sie zur Implikation die **Umkehrung**. Ist das eine „immer wahre“ Aussage, also der Normalfall?
    c. Bilden Sie zur Implikation die **Kontraposition**. Erläutern Sie kurz die entstandene Aussage unter Verwendung von „notwendig“ oder „ausreichend“.

4.
    a. Zeichnen Sie zum Modul 15 jeweils zum Faktor f = 6 und f = 7 das Diagramm. (Das ist eine gute Kopfrechenübung! Zeichenvorlagen siehe unten) Wann tritt 0 als Ergebnis auf? Warum tritt bei f = 7   0 nicht als Ergebnis auf?
    b. Es sei $m \in \mathbb{N}$ als Modul für die Kongruenzrechnung gegeben. Dann ist $R_m = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\right\}$ die Menge der Restklassen.

Eine Restklasse $\overline{a} \in R_m, \overline{a} \neq \overline{0}$ heißt Nullteiler von R_m, wenn es eine Restklasse $\overline{b} \in R_m, \overline{b} \neq \overline{0}$ gibt mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$. Was ist nach Aufgabe a. ein Nullteiler von R_{15}? Nennen Sie <u>alle</u> Nullteiler von R_{15} und zeigen Sie, dass es Nullteiler sind. D.h. geben Sie jeweils konkret den zugehörigen Faktor $\overline{b}$ an.
Wie können Sie begründen, dass Sie <u>alle</u> Nullteiler von R_{15} gefunden haben?

5. „In einer Kongruenz darf man eine Zahl durch eine kongruente Zahl ersetzen.“
   Genauer: $a + b \equiv c \bmod m$ und $b \equiv d \bmod m \Rightarrow a + d \equiv c \bmod m$
   Beweisen Sie diese Gesetzmäßigkeit.

6. Systematisches Üben, um tiefere Einsichten zu gewinnen.
   $1^4 = 1 = 0 \cdot 5 + 1$
   $2^4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$
   $3^4 = 81 = 16 \cdot 5 + 1$
   $4^4 = 256 = 51 \cdot 5 + 1$
   ...
   a. Setzen Sie die Kette fort, bis Sie eine Systematik vermuten.
   b. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

7. (Freiwillige Extraaufgabe, bringt Zusatzpunkte. Abgabe auf getrenntem Zettel nur bei Herrn Albers in der Vorlesung)
   Die Gleichung $n^2 + m^2 = 9999999999999999999999$ besitzt keine ganzzahligen Lösungen für n und m.
   Beweis? Hilfestellung: Teilbarkeit durch 4